NGƯT.ThS. LÊ HOÀNH PHÒ

Kiến thức và rèn luyện kĩ năng làm bài

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN GIẢI TÍCH 12

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGƯT.ThS. LÊ HOÀNH PHÒ

Mở rộng kiến thức và rèn luyện kĩ năng làm bài

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN GIẢI TÍCH 12

(Bồi dưỡng học sinh giỏi)

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: LAN HƯƠNG

Sửa bài: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Chế bản: NGUYỄN KHỞI MINH

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

Đối tác liên kết xuất bản:

Nhà sách HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN GIẢI TÍCH 12

Mã số: 1L- 154ĐH2014
In 2.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ty Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Giấy phép xuất bản số: 463-2014/CXB/10-99 ĐHQGHN, ngày 14/03/2014
Quyết định xuất bản số: 154LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014.

Lời nói đầu

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 10, lớp 11, lớp 12 nắm vững kiến thức căn bản về môn Toán ngay từ lúc vào THPT cho đến khi chuẩn bị thi Tốt nghiệp, tuyển sinh Cao đẳng, Đại học, tác giả đã biên soạn bộ sách **PHƯƠNG PHÁP GIẢI** gồm 6 cuốn:

- **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN ĐẠI SỐ 10**
- **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN HÌNH HỌC 10**
- **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH 11**
- **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN HÌNH HỌC 11**
- **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN GIẢI TÍCH 12**
- **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN HÌNH HỌC 12**

Từ nền Toán căn bản này, các bạn có thể nâng cao dần dần, bổ sung và mở rộng kiến thức và phương pháp giải Toán, rèn luyện kỹ năng làm bài và từng bước giải đúng, giải gọn các bài tập, các bài toán kiểm tra, thi cử.

Cuốn **CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN GIẢI TÍCH 12** này có 16 chủ đề với nội dung là phân dạng Toán, tóm tắt kiến thức và phương pháp giải, các chú ý; phần tiếp theo là các bài toán chọn lọc căn bản minh họa với nhiều dạng loại và mức độ; phần cuối là 8 bài tập có hướng dẫn hay đáp số.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên soạn song không tránh khỏi những sai sót mà tác giả chưa thấy hết, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc, học sinh để lần in sau hoàn thiện hơn.

Tác giả

LÊ HOÀNH PHÒ

O CHỦ ĐỀ I

TÍNH ĐƠN ĐIỆU

DẠNG TOÁN 1. TÌM KHOẢNG ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN

Định nghĩa: *Hàm số f xác định trên K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.*

- f đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- f nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng (a; b) khi đó:

- Nếu hàm số f đồng biến trên (a; b) thì $f'(x) \geqslant 0$ *với mọi* $x \in (a; b)$

- Nếu hàm số f nghịch biến trên (a; b) thì $f'(x) \leqslant 0$ *với mọi* $x \in (a; b)$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng (a; b) khi đó:

Nếu $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a; b)$ *thì hàm số f đồng biến trên (a; b)*

Nếu $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a; b)$ *thì hàm số f nghịch biến trên (a; b)*

Khi $f'(x) = 0$ *chỉ tại một số hữu hạn điểm của (a; b) thì kết quả trên vẫn đúng.*

Nếu hàm số f đồng biến trên (a; b) và liên tục trên nửa khoảng [a;b); (a;b]; đoạn [a;b] thì đồng biến trên nửa khoảng [a;b); (a;b]; đoạn [a;b] tương ứng.

Tương tự cho nghịch biến.

Phương pháp xét tính đơn điệu:

- Tìm tập xác định

- Tính đạo hàm, xét dấu đạo hàm, lập bảng biến thiên

- Kết luận

Chú ý:

1) Công thức và quy tắc đạo hàm

$y = C \Rightarrow y' = 0$; $y = x \Rightarrow y' = 1$; $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$;

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$; $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n^{n-1}\sqrt[]{x^n}}$;

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$; $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$;

$y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $y = \cot x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

$(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$;

$(u.v)' = u'.v + u.v'; \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}; f'_x = f'_u . u'_x.$

2) Phương trình lượng giác cơ bản:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 1: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = x^2 - 8x + 5$ b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**. Ta có $y' = 2x - 8$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Bảng biến thiên (BBT)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		-	0	+	
y		↘		↗	

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4)$, đồng biến trên $(4; +\infty)$.

b) D = **R**. Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ hoặc $x = 1$.

BBT

x	$-\infty$		1/3		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; \dfrac{1}{3})$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(\dfrac{1}{3}; 1)$.

Bài toán 2: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = x^4 - 2x^2$. b) $y = x^4 + 9x^2 - 3$.

Giải

a) Tập xác định D = **R**.

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0; 1)$.

b) D = **R**. Ta có $y' = 4x^3 + 18x = 2x(2x^2 + 9)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0$ trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow$ y đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$y' < 0$ trên khoảng $(-\infty; 0) \Rightarrow$ y nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Bài toán 3: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = \dfrac{3x-9}{1-x}$ b) $y = x + \dfrac{3}{x}$.

Giải

a) D = **R** \ {1}.

Ta có $y' = \dfrac{-6}{(1-x)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

b) Tập xác định D = **R** \ {0}.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2-3}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

BBT:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(0; \sqrt{3})$.

Bài toán 4: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2-9}$.

Giải

a) D = **R**. Ta có: $y' = \dfrac{-x^2-2x+8}{(x^2+8)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hay $x = 2$

BBT:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y		↘		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng (-4; 2) và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -4)$, $(2; +\infty)$.

b) D = **R** \ {-3; 3}. Ta có $y' = \dfrac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2} < 0, \forall x \neq \pm 3$.

Do đó y' < 0 trên các khoảng $(-\infty; -3)$, (-3; 3), $(3; +\infty)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng đó.

Bài toán 5: Xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn, nửa khoảng:

a) $y = \sqrt{9-x^2}$ b) $y = \sqrt{x^2-2x+7}$.

Giải

a) Điều kiện $9 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$ nên D = [-3; 3].

Với -3 < x < 3 thì $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT:

x	-3		0		3
y'	‖	+	0	-	‖
y		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng (-3; 0) và nghịch biến trên khoảng (0; 3). Do hàm số f liên tục trên đoạn [0; 2] nên hàm số đồng biến trên đoạn [-2; 0] và nghịch biến trên đoạn [0; 2].

b) Vì $\Delta' = 1 - 3 < 0$ nên $x^2 - 2x + 7 > 0, \forall x \Rightarrow$ D = **R**.

Ta có $y' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+7}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+7}}$.

$y' \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$, $y' \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$

Và f liên tục trên **R** nên hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; 1]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Bài toán 6: Xét sự biến thiên của hàm số:

a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$.

Giải

a) ĐK: $16 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < x < 4$. D = (-4; 4).

Ta có $y' = \dfrac{16}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}} > 0, \forall x \in (-4; 4)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng (-4; 4).

b) $D = [0; +\infty)$. Với $x > 0$, $y' = \dfrac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

BBT:

x	0		2		$+\infty$
y'	||	+	0	-	
y		↗		↘	

Vậy hàm số đồng biến trên (0; 2) và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Bài toán 7: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

a) $y = \dfrac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$ b) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$.

Giải

a) D = **R**. Với $x \neq 0$, ta có: $y' = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1$ hoặc $x < -1$ hoặc $x > 1$.

$y' < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng (-1; 1).

b) Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{2x^2(x^2-9)}{(x^2-6)\sqrt{x^2-6}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

BBT:

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		+	0	-			-	0	+	
y		↗		↘			↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3; -\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; 3)$.

Bài toán 8: Xét sự biến thiên của hàm số:

a) y = 4sinx - 3 b) $y = x + \cos^2 x$.

Giải

a) D = **R**. Ta có y' = 4cosx

Xét y ' >0 $\Leftrightarrow$ 4cosx >0 $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Xét y ' <0 $\Leftrightarrow$ 4cosx <0 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) D = **R**. Ta có y' = 1 - 2cosxsinx = 1 - sin2x

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Hàm số liên tục trên mỗi đoạn $[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$ và

$y' > 0$ trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi)$ nên đồng biến trên mỗi đoạn $[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy hàm số đồng biến trên **R**.

Cách khác: lấy a, b bất kỳ thuộc **R** và a < b.

Trên khoảng (a;b) thì y ' $\geqslant$ 0 và y' = 0 tại hữu hạn điểm nên hàm số f đồng biến, do đó f(a) > f(b). Vậy theo định nghĩa thì hàm số f đồng biến trên **R**.

Bài toán 9: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) y = x - sinx trên $[0; 2\pi]$ b) y = x + 2cosx trên $(0; \pi)$.

Giải

a) y' = 1 - cosx. Ta có $\forall x\ [0; 2\pi] \Rightarrow y' \geqslant 0$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2\pi$.

Vì hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2\pi]$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 2\pi]$.

b) y' = 1 - 2 sinx. Trên khoảng $(0; \pi)$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow \sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ hoặc } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; \frac{\pi}{6})$ và $(\frac{5\pi}{6}; \pi)$.